Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé, i étant l'affixe du point de coordonnées $(0, 1)$.
*On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.*

Questions préliminaires

1. Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

   En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé orthocentre de ce triangle.

2. Soit ABC un triangle, Ω le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$.
   Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

   Étant donnée une partie X du plan, supposée non incluse dans une droite, on note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X.
   *On dira qu'une partie X du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans X, c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X.*

Première partie

1. Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.
2. Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.
3. Soit X un ensemble de quatre points d'un cercle et $Y = \mathcal{H}(X)$.
   a) Montrer que Y se déduit de X par une transformation simple.
   b) Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.
4. a) Soit Γ un cercle de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(\Gamma)$.
   b) Soit D un disque de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(D)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, R est un nombre réel strictement positif, n est un entier au moins égal à 2 et X est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R.
On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles dont les sommets appartiennent à X. On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de $\mathcal{T}$.

1. Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle ?
2. Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus ?
3. On note L la variable aléatoire qui à tout élément de $\mathcal{T}$ associe le carré de la distance de O à son orthocentre.
   Déterminer, en fonction de n et R, l'espérance de la variable aléatoire L.

Troisième partie

1. Soit a, b, c trois réels tels que $a(b-c) \neq 0$ et A, B, C les points de coordonnées respectives $(0, a)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$.
   Calculer les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC.
2. Soit X la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite Δ et d'un point M n'appartenant pas à Δ.
   Déterminer $\mathcal{H}(X)$. Montrer que $\mathcal{H}(X) \cup X$ est une partie orthocentrique.
3. Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins trois points de $(O, \vec{u})$ distincts de O.

a) Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \overrightarrow{u})$ d'abscisses non nulles et de même signe.

b) Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \overrightarrow{u})$ d'abscisses strictement positives.

4. a) Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes $(O, \overrightarrow{u})$ et $(O, \overrightarrow{v})$.

b) Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \overrightarrow{u})$ et $(O, \overrightarrow{v})$ et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (x'_n) de réels non nuls telles que, pour tout entier n, les points de coordonnées $(x_n, 0)$ et $(x'_n, 0)$ appartiennent à X, et telles que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x'_n = 0.$$

Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \overrightarrow{u})$ et $(O, \overrightarrow{v})$ et contenant au moins six points peut-elle être finie ?

Quatrième partie

L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.

1. Soit k un réel non nul et soit Y l'hyperbole d'équation $xy = k$.

a) Soit A, B, C, D quatre points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c, d. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $abcd = -k^2$.

b) Soit A, B, C trois points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c. Déterminer l'orthocentre de ABC.

c) Montrer que Y est orthocentrique.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul q et on note X l'ensemble d'équation $x^2 + qxy - y^2 = 1$.

2. a) Montrer que l'équation $t^2 - qt - 1 = 0$ possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on note r et r' ces deux racines et s la similitude définie par la représentation complexe $z \mapsto (1 - ri)z$.

b) Montrer que $s(X)$ est une hyperbole, d'équation $xy = k$, où k est un réel à déterminer. En déduire que X est un ensemble orthocentrique.

3. Soit G l'ensemble des points de X à coordonnées entières et Γ l'ensemble des abscisses des éléments de $s(G)$.

a) Vérifier que Γ est l'ensemble des nombres réels de la forme $x + ry$, où x et y sont deux entiers tels que $(x + ry)(x + r'y) = 1$.

b) Montrer que $-1 \in \Gamma$; montrer que $r^2 \in \Gamma$.

c) Montrer que le produit de deux éléments de Γ est élément de Γ et que l'inverse d'un élément de Γ est élément de Γ. Montrer que Γ possède une infinité d'éléments.

4. Déduire de ce qui précède que l'ensemble G des points à coordonnées entières de X est une partie orthocentrique infinie.

Cinquième partie

On note Y_1 l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et Y_0 l'ensemble d'équation $xy = 0$, c'est-à-dire la réunion des axes $(O, \overrightarrow{u})$ et $(O, \overrightarrow{v})$.
On admet le résultat suivant :
« Étant donnés quatre points A, B, C et D du plan, il existe une similitude s telle que $s(A)$, $s(B)$, $s(C)$ et $s(D)$ appartiennent tous à Y_1 ou bien appartiennent tous à Y_0 ».
Soit A_0, B_0, C_0 et D_0 quatre points, trois à trois non alignés, et soit $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$.
On définit par récurrence $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$ pour tout entier naturel n. On suppose qu'il existe un entier n strictement positif tel que $X_n = X_0$ et on note m le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que $m = 1$ ou $m = 2$.
2. Déterminer les ensembles X_0 tels que $m = 1$, puis ceux tels que $m = 2$.

* * *

*